安定レヴィ過程とその条件付けについて

矢野, 孝次

安定レヴィ過程とその条件付けについて

矢野 孝次 (京都大学大学院理学研究科)

ラプラシアンの熱半群により時間発展するマルコフ過程はブラウン運動と呼ばれ，分数べきラプラシアンのそれは安定レヴィ過程と呼ばれる．本稿では，Feynman–Kac 半群の長時間漸近挙動に関する結果を紹介し，マルコフ過程の長時間条件付けの問題 (処罰問題とも呼ばれる) との関連を述べる．

1 ブラウン運動とラプラシアン

$(X_t)_{t\ge 0}$ を $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動とし，推移半群

$$T_t f(x) = E_x[f(X_t)], \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) \tag{1.1}$$

を考える．ここで $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の有界可測関数全体を表す．具体的には，

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) \tag{1.2}$$

で定まる熱核 $p_t(x,y)$ を用いて

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(x,y) \mathrm{d}y, \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) \tag{1.3}$$

によって与えられる．ブラウン運動の分布は推移半群 $(T_t)_{t\ge 0}$ で決まっている．実際，有限個の時点 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ において粒子が集合 $C_1, \ldots, C_n$ 内に観測される事象を

$$\{X_\Pi \in C_\Pi\} := \{X_{t_1} \in C_1, \cdots, X_{t_n} \in C_n\} \tag{1.4}$$

と書くことにすれば，マルコフ性により，観測確率を推移半群から求める公式

$$P_x(X_\Pi \in C_\Pi) = T_{t_1-t_0} 1_{C_1} \left(\cdots T_{t_{n-1}-t_{n-2}} 1_{C_{n-1}} \left(T_{t_n - t_{n-1}} 1_{C_n} \right) \cdots \right)(x) \tag{1.5}$$

が得られる．ブラウン運動の path は確率 1 で連続であることから，有限次元分布 (1.5) によってブラウン運動の分布が完全に特徴付けられている．ここで，推移半群 $(T_t)_{t\ge 0}$ の生成作用素 $\mathcal{G}$ を考える (この定義については 3 節で触れる) と，急減少関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は定義域 $D(\mathcal{G})$ の元であり，f に対してはラプラシアン Δ と一致する:

$$\mathcal{G}f = \Delta f, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset D(\mathcal{G}). \tag{1.6}$$

[0]Email: kyano@math.kyoto-u.ac.jp

2 安定レヴィ過程と分数べきラプラシアン

Fourier 変換と逆変換を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} g(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.1}$$

と書けば，$\alpha > 0$ に対して

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^\alpha \mathcal{F}[f]], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{2.2}$$

が緩増加超関数の意味で定まる．こうして定まる作用素 $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ を**分数べきラプラシアン (fractional Laplacian)** と呼ぶ.

さてここで，**指数** α **について** $0 < \alpha \leq 2$ **を仮定する**．この場合に限り分数べきラプラシアンが確率過程に対応することが知られていて，それは **(対称) 安定レヴィ過程** $(X_t)_{t\geq 0}$ である (cf. [14])．式 (1.1) で定まる推移半群 $(T_t)_{t\geq 0}$ は，

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(y-x)\cdot\xi}\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}\mathrm{d}\xi \tag{2.3}$$

によって定まる熱核を用いて式 (1.3) のように表される．$\alpha = 2$ のときは式 (1.2) に (時間変換して) 一致していることに注意しておく．その生成作用素 $\mathcal{G}$ について，

$$\mathcal{G}f = -(-\Delta)^{\alpha/2} f, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset D(\mathcal{G}) \tag{2.4}$$

が成立する．注意すべきことに，通常のラプラシアンと異なり，$0 < \alpha < 2$ のときの分数べきラプラシアンは局所作用素でない．実際，それは

$$\mathcal{G}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|y|>\varepsilon} \{f(x+y) - f(x)\}\, c(d,\alpha)\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+\alpha}} \tag{2.5}$$

なる形の積分作用素である (cf. [1, Theorem 3.3.3])．ここで，定数 $c(d,\alpha)$ は **Lévy 指数** $-|\xi|^\alpha$ の **Lévy–Khinchin 表現**より決まる:

$$-|\xi|^\alpha = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|y|>\varepsilon} \left(\mathrm{e}^{i\xi\cdot y} - 1\right) c(d,\alpha)\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+\alpha}}. \tag{2.6}$$

ブラウン運動の場合と異なり，$0 < \alpha < 2$ のときの安定レヴィ過程の path は確率 1 で，右連続かつ有限な左極限を持ち，不連続である．このことは，生成作用素が局所性を持たないことと関係している．

3 Feynman–Kac 半群

ここでは一般に，マルコフ過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ で確率 1 で右連続かつ有限な左極限を持つものに対し，Dynkin ([2]) の意味の生成作用素について述べる (cf. [13])．要点は，作用素半群で通常用いられる強連続性を有界各点収束で置き換えるところにある．$\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ の部分族

$$\mathbb{L} = \left\{ f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) : \lim_{t\to 0+} T_t f = f \ (\text{有界各点収束}) \right\} \tag{3.1}$$

を導入する．過程の右連続性より，$\mathbb{L}$ は有界連続関数を含む．$\mathbb{L}$ の元 f であって $(T_t f - f)/t$ がある $\mathbb{L}$ の元に有界各点収束するような f の全体を定義域 $D(\mathcal{G})$ とし，その極限関数を $\mathcal{G}f$ と定める．もしも，無限遠で消える連続関数空間への T_t の制限が Feller 半群であるならば，Dynkin の意味の生成作用素は Feller 半群のそれの拡張になっている．

次のようにしてポテンシャルの効果を加える．下に有界な可測関数 V に対し，

$$A_t^V = \int_0^t V(X_s)\mathrm{d}s \tag{3.2}$$

とおき，

$$T_t^V f(x) = E_x\left[f(X_t)\mathrm{e}^{-A_t^V}\right], \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) \tag{3.3}$$

とおくと，マルコフ性より $(T_t^V)_{t\geq 0}$ は半群である．これを **Feynman–Kac 半群**と呼ぶ (cf. [3],[15])．**Kac の定理** (cf. [13]) によると，$(T_t^V)_{t\geq 0}$ の生成作用素 $\mathcal{G}^V$ について，

$$D(\mathcal{G}^V) = D(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G}^V = \mathcal{G} - V \tag{3.4}$$

が成り立つ．このことより，もし $t > 0$ のとき $T_t^V f \in D(\mathcal{G})$ ならば，$u(t,x) = T_t^V f(x)$ はコーシー問題

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathcal{G}u - Vu \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

の解である．

V が非負のときは，消滅の効果を表す．実際，$\boldsymbol{e}$ を独立な標準指数分布確率変数として

$$E_x\left[f(X_t)\mathrm{e}^{-A_t^V}\right] = E_x\left[f(X_t); \boldsymbol{e} > A_t^V\right], \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) \tag{3.6}$$

と書けることから，状態空間を $\bar{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\delta\}$ に拡大して

$$X_t^V = \begin{cases} X_t & \text{if } A_t^V < \boldsymbol{e}, \\ \delta & \text{if } A_t^V \geq \boldsymbol{e} \end{cases} \tag{3.7}$$

と定めると，$(X_t^V)_{t\geq 0}$ の推移半群は $(T_t^V)_{t\geq 0}$ である．式 (3.7) は，時間とともに増大する過程 A_t^V がランダムに指定された閾値 $\boldsymbol{e}$ に達すると粒子が消滅することを表している．

$$\zeta = \inf\{t \geq 0 : X_t^V = \delta\} = \inf\{t \geq 0 : A_t^V \geq \boldsymbol{e}\} \tag{3.8}$$

を**生存時間 (lifetime)** と呼ぶ．

閉集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し $H_A = \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$ を A への到達時刻とし，

$$X_t^A = \begin{cases} X_t & \text{if } t < H_A \\ \delta & \text{if } t \geq H_A \end{cases} \qquad V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin A \\ \infty & \text{if } x \in A \end{cases} \tag{3.9}$$

とする．$(X_t^A)_{t\geq 0}$ は A に到達すると消滅する過程であり，その推移半群 $(T_t^A)_{t\geq 0}$ は，形式的にではあるが，上式で定義される関数 V に対応する Feynman–Kac 半群 $(T_t^V)_{t\geq 0}$ であるとも考えられる．

4 一次元ブラウン運動の場合

4.1 Feynman–Kac 半群の長時間漸近挙動

原点に到達すると消滅する過程の Feynman–Kac 半群について述べる．$T_t^{\{0\}}1$ は時刻 t までブラウン運動 $(X_t)_{t\geq 0}$ が原点に到達しない確率を表しており，反射原理により

$$T_t^{\{0\}}1(x) = P_x(H_{\{0\}} > t) = \int_t^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \mathrm{d}s \tag{4.1}$$

なる積分表示が得られる．この式は $t \to \infty$ のとき 0 に収束しており，このことは一次元ブラウン運動の**点再帰性**を表している．変数変換してロピタルの定理を使うと

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} T_t^{\{0\}}1(x) &= |x| \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \frac{\mathrm{d}s}{s} && (4.2)\\
&= |x| \lim_{\varepsilon\to 0+} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{u} \exp\left(-\frac{x^2}{2}u\right) \frac{\mathrm{d}u}{u} && (4.3)\\
&= |x| \lim_{\varepsilon\to 0+} \sqrt{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\varepsilon\right) \frac{1}{\varepsilon} && (4.4)\\
&= |x| && (4.5)
\end{aligned}$$

が得られる．$h(x) = |x|$ とおくと，

$$T_t^{\{0\}}h = T_t^{\{0\}}\left(\lim_{s\to\infty} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} T_s^{\{0\}}1\right) = \lim_{s\to\infty} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} T_{t+s}^{\{0\}}1 = h \tag{4.6}$$

が得られる．すなわち，h は $T_t^{\{0\}}$-不変である．

Roynette–Vallois–Yor [7] は一般の消滅ポテンシャル V に対して，次のような結果を得た．

定理 4.1 ([7]; cf. also [8] and [9]). 非負可測関数 V は

$$0 < \int_{-\infty}^\infty V(x)(1+|x|)\mathrm{d}x < \infty \tag{4.7}$$

を満たすと仮定する．このとき，極限

$$\varphi(x) := \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} T_t^V 1(x) \tag{4.8}$$

が正かつ有限に存在し，φ は T_t^V-不変である．さらに，極限関数 φ は Sturm–Liouville 方程式 $\frac{1}{2}\varphi'' = V\varphi$ の解であって，次の境界条件を満たす:

$$\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1. \tag{4.9}$$

4.2 ブラウン運動の長時間条件付け (処罰問題)

$h(x)=|x|$ は $T_t^{\{0\}}$-不変であることから，

$$T_t^{(h)}f=\frac{1}{h}T_t^{\{0\}}(hf) \tag{4.10}$$

もまた半群をなす．これを **Doob の h-変換**と言う．今の場合，半群 $(T_t^{(h)})_{t\ge0}$ は **3 次元ベッセル過程** $(X_t^{3\mathrm{B}})_{t\ge0}$，すなわち 3 次元ブラウン運動のノルムにより得られる (一次元の) マルコフ過程，の推移半群である．その生成作用素は，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f'(0)=0$ なる関数を定義域に含み，

$$\mathcal{G}^{3\mathrm{B}}f=\frac{1}{2}f''+\frac{1}{x}f' \tag{4.11}$$

を満たす．

ブラウン運動の分布について，時刻 t まで原点に到達しない条件付き確率は，素朴に

$$P_x\big(X_\Pi\in C_\Pi\mid H_{\{0\}}>t\big)=\frac{P_x\big(X_\Pi\in C_\Pi,\ H_{\{0\}}>t\big)}{P_x\big(H_{\{0\}}>t\big)} \tag{4.12}$$

で定義される．しかしながら，"**永遠に**原点に到達しない条件付き確率" は，素朴に定義しようとすると分母が 0 であり都合が悪い．そこで，

$$P_x\big(X_\Pi\in C_\Pi\mid H_{\{0\}}=\infty\big)=\lim_{t\to\infty}P_x\big(X_\Pi\in C_\Pi\mid H_{\{0\}}>t\big) \tag{4.13}$$

を定義として採用することは自然に思える．しかも，この極限は収束する．実際，$\Gamma_t=1_{\{H_{\{0\}}>t\}}$ および $s>t_n$ として，マルコフ性を用いて右辺の極限を計算すると，

$$\begin{aligned}
P_x\big(X_\Pi\in C_\Pi\mid H_{\{0\}}>t\big)=&\frac{E_x[\Gamma_t;X_\Pi\in C_\Pi]}{E_x[\Gamma_t]} &(4.14)\\
=&\frac{E_x[E_{X_s}[\Gamma_{t-s}]\cdot\Gamma_s;X_\Pi\in C_\Pi]}{E_x[\Gamma_t]} &(4.15)\\
=&\frac{E_x\left[\sqrt{\frac{\pi(t-s)}{2}}E_{X_s}[\Gamma_{t-s}]\cdot\Gamma_s;X_\Pi\in C_\Pi\right]}{\sqrt{\frac{\pi(t-s)}{2}}E_x[\Gamma_t]} &(4.16)\\
\xrightarrow[t\to\infty]{}&\frac{E_x[|X_s|\cdot\Gamma_s;X_\Pi\in C_\Pi]}{|x|} &(4.17)\\
=&P_x\big(X_\Pi^{3\mathrm{B}}\in C_\Pi\big) &(4.18)
\end{aligned}$$

を得る．極限をとるところで順序交換をしているが，この部分は Scheffé の補題より正当化される．

同様の議論によって，定理 4.1 から直ちに次の結果が得られる．

定理 4.2 ([7]; cf. also [8] and [9]). 定理 4.1 の仮定を満たす消滅ポテンシャル V に対し，Feynman–Kac 半群 $(T_t^V)_{t\ge 0}$ により時間発展するマルコフ過程 (3.7) が永遠に消滅しない条件付き確率は，

$$P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi \mid \zeta = \infty\big) := \lim_{t\to\infty} P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi \mid \zeta > t\big) = P_x\Big(X_\Pi^{(\varphi)} \in C_\Pi\Big) \tag{4.19}$$

で与えられる．ここで，極限で得られるマルコフ過程 $(X_t^{(\varphi)})_{t\ge 0}$ は

$$T_t^{(\varphi)} f = \frac{1}{\varphi} T_t^V(\varphi f) \tag{4.20}$$

を推移半群に持つ．その生成作用素は，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を定義域に含み，

$$\mathcal{G}^{(\varphi)} f = \frac{1}{2} f'' + \frac{\varphi'}{\varphi} f' \tag{4.21}$$

で与えられる．

4.3 普遍シグマ有限測度

Najnudel–Roynette–Yor [5] は，定理 4.2 に現れる極限過程がすべて互いに絶対連続であることを見出し，そのことを直接に明らかにする**普遍的なシグマ有限測度**を導入した．

有限個の時点 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と集合 $C_1, \ldots, C_n$ が与えられたとき，$u > 0$ に対し時刻 u までの観測と時刻 u より後の観測を表す事象を，それぞれ

$$\{X_\Pi \in C_\Pi \text{ pre-}u\} := \big\{X_{t_j} \in C_{t_j} \text{ for all } j \text{ with } t_j < u\big\}, \tag{4.22}$$

$$\{X_\Pi \in C_\Pi \text{ post-}u\} := \big\{X_{t_j - u} \in C_{t_j} \text{ for all } j \text{ with } t_j \ge u\big\} \tag{4.23}$$

と書く．長さ u の**ブラウン橋**を $P_{0,0}^{(u)}$ と書く，すなわち:

$$P_{0,0}^{(u)}(X_\Pi \in C_\Pi \text{ pre-}u) = P_0(X_\Pi \in C_\Pi \text{ pre-}u \mid X_u = 0). \tag{4.24}$$

時刻 u まではブラウン橋，時刻 u からは 3 次元ベッセル過程を独立に走らせ，u について測度 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}}$ で積分することでシグマ有限測度 $\mathcal{W}$ を定める:

$$\mathcal{W}(X_\Pi \in C_\Pi) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} P_{0,0}^{(u)}(X_\Pi \in C_\Pi \text{ pre-}u)\, P_0\big(X_\Pi^{3\mathrm{B}} \in C_\Pi \text{ post-}u\big). \tag{4.25}$$

$\mathcal{W}$ の path を $x \in \mathbb{R}$ だけ平行移動したものを $\mathcal{W}_x$ と書く．

定理 4.3 ([5]). 定理 4.1 の仮定を満たす消滅ポテンシャル V に対し，

$$\varphi(x) := \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} T_t^V 1(x) = \mathcal{W}_x\left[\mathrm{e}^{-A_\infty^V}\right], \tag{4.26}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi\big) = \mathcal{W}_x\left[\mathrm{e}^{-A_\infty^V}; X_\Pi \in C_\Pi\right] \tag{4.27}$$

が成り立つ．従って特に，

$$P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi \mid \zeta = \infty\big) = P_x\Big(X_\Pi^{(\varphi)} \in C_\Pi\Big) = \frac{1}{\varphi(x)} \mathcal{W}_x\left[\mathrm{e}^{-A_\infty^V}; X_\Pi \in C_\Pi\right]. \tag{4.28}$$

5 一次元安定レヴィ過程の場合

まず，原点に到達すると消滅する過程の Feynman–Kac 半群について述べる．安定レヴィ過程の場合は，指数 α によって状況が異なる．$0 < \alpha \le 1$ の場合は点再帰的でなく，過程は原点に決して到達しない，従って $T_t^{\{0\}}1(x) \equiv 1$ である．一方，$1 < \alpha < 2$ の場合は点再帰的であり，到達時刻の分布のラプラス変換はレゾルベント密度

$$u_q(x,y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} p_t(x,y)\mathrm{d}t, \quad q > 0 \tag{5.1}$$

を用いて

$$P_x\left[\mathrm{e}^{-qH_{\{0\}}}\right] = \frac{u_q(x,0)}{u_q(x,x)} \tag{5.2}$$

で与えられる．到達時刻の分布は初等的には求まらないが，タウバー型定理により漸近挙動を求めることができて，

$$t^{1-\frac{1}{\alpha}} T_t^{\{0\}} 1(x) = t^{1-\frac{1}{\alpha}} P_x(H_{\{0\}} > t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} c_1(\alpha)|x|^{\alpha-1} \tag{5.3}$$

が得られる．$c_1(\alpha)$ は α のみによって決まる定数である．

永遠に原点に到達しない条件付き確率について，次のことが成り立つ．

定理 5.1 (**[12],[11]**)**.** $h(x) = |x|^{\alpha-1}$ は $T_t^{\{0\}}$-不変である．また，Doob の h-変換 $(T_t^{(h)})_{t\ge0}$ はある Feller 過程 $(X_t^{(h)})_{t\ge0}$ の推移半群である．

Yano–Yano–Yor [12] では，指数 $1 < \alpha < 2$ の一次元安定レヴィ過程に対して，定理 4.1, 4.2, 4.3 の拡張を得ている．安定レヴィ橋 $P_{0,0}^{(u)}$ を (4.24) で定義し，シグマ有限測度 $\mathcal{P}^\times$ を

$$\mathcal{P}^\times(X_\Pi \in C_\Pi) = c_2(\alpha)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}} P_{0,0}^{(u)}(X_\Pi \in C_\Pi \text{ pre-}u)\, P_0\Big(X_\Pi^{(\mathrm{h})} \in C_\Pi \text{ post-}u\Big). \tag{5.4}$$

で定める．定数 $c_2(\alpha)$ のとり方は省略する．$\mathcal{P}^\times$ の path を $x \in \mathbb{R}$ だけ平行移動したものを $\mathcal{P}_x^\times$ と書く．

定理 5.2 (**[12]**)**.** 非負可測関数 V は

$$0 < \int_{-\infty}^\infty V(x)(1+|x|^{\alpha-1})\mathrm{d}x < \infty \tag{5.5}$$

を満たすと仮定する．このとき，

$$\varphi(x) := \lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{\alpha}} T_t^V 1(x) = \mathcal{P}_x^\times\left[\mathrm{e}^{-A_\infty^V}\right] \tag{5.6}$$

の極限が正かつ有限に存在し，φ は T_t^V-不変である．さらに，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{\alpha}} P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi\big) = \mathcal{P}_x^\times\left[\mathrm{e}^{-A_\infty^V}; X_\Pi \in C_\Pi\right] \tag{5.7}$$

が成り立つ．従って特に，

$$P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi \mid \zeta = \infty\big) = P_x\Big(X_\Pi^{(\varphi)} \in C_\Pi\Big) = \frac{1}{\varphi(x)}\mathcal{P}_x^\times\left[\mathrm{e}^{-A_\infty^V}; X_\Pi \in C_\Pi\right]. \tag{5.8}$$

が成り立つ．ここで $(X_t^{(\varphi)})_{t\ge0}$ は $T_t^{(\varphi)} f = \frac{1}{\varphi} T_t^V(\varphi f)$ を推移半群に持つマルコフ過程である．

6 多次元の場合

(1) 二次元ブラウン運動の場合について．この場合は，どんな点 x を考えても，決して x に到達しない (あらかじめ指定した点には到達しないということ)．しかし，任意の点の近傍には必ず帰ってくるという意味で**再帰的**であるから，点の代わりに，コンパクト集合に到達しない条件付けを考えることには意味がある．$A \subset \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\int_0^\infty P_x(H_A > t,\ X_t \in \mathrm{d}y)\mathrm{d}t = g_A(x,y)\mathrm{d}y \tag{6.1}$$

で定まる密度関数 $g_A(x,y)$ を Green 関数と呼ぶ．次のことが知られている．

定理 6.1 (Port [6]). $A \subset \mathbb{R}^2$ はコンパクト集合で，すべての x で $P_x(H_A < \infty) = 1$ と仮定する．このとき，以下が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{2\pi} T_t^A 1(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{2\pi} P_x(H_A > t) = \lim_{|y|\to\infty} g_A(x,y). \tag{6.2}$$

消滅ポテンシャルの場合は次のことが知られている．

定理 6.2 (Roynette–Vallois–Yor [9, §2.1]). 非負可測関数 V はコンパクト集合の外で 0 とし，$\int V(x)\mathrm{d}x > 0$ と仮定する．このとき，極限

$$\varphi(x) := \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{2\pi} T_t^V 1(x) \tag{6.3}$$

が正かつ有限に存在し，φ は T_t^V-不変である．さらに，極限関数 φ は Sturm–Liouville 方程式 $\frac{1}{2}\Delta\varphi = V\varphi$ の解であって，次の境界条件を満たす:

$$\lim_{|x|\to\infty} |x| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) = \frac{1}{\pi}. \tag{6.4}$$

永久に消滅しない条件付き確率は

$$P_x\big(X_\Pi^V \in C_\Pi \mid \zeta = \infty\big) = P_x\Big(X_\Pi^{(\varphi)} \in C_\Pi\Big) \tag{6.5}$$

である．但し，マルコフ過程 $(X_t^{(\varphi)})_{t\ge 0}$ は $T_t^{(\varphi)} f = \frac{1}{\varphi} T_t^V(\varphi f)$ を推移半群に持ち，その生成作用素は，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ を定義域に含み，次で与えられる:

$$\mathcal{G}^{(\varphi)} f = \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{\varphi}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla f). \tag{6.6}$$

[9] では普遍シグマ有限測度についても述べられている．

(2) 多次元ブラウン運動 $(d \ge 2)$ の場合について．Ishige–Kabeya [4] の結果を非常にラフに述べると以下のようである (なお，ラプラシアンの係数は $1/2$ でなく 1 である)．V が半径のみの関数 $V = V(r)$ であって，

$$r^2 V(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \omega > 0 \tag{6.7}$$

の場合に，$\alpha = \alpha(\omega)$ を二次方程式 $\alpha(\alpha + d - 2) = \omega$ の正の解とすると，可積分性のよい関数 f に対し，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{2}+\alpha(\omega)} T_t^V f(x) = c(\omega)(\phi, U_0)U_0(x) \tag{6.8}$$

が成り立つ．但し，$c(\omega)$ は定数，$(\phi, U_0) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)U_0(x)\mathrm{d}x$ で，$U_0 = U_0(r) = U(r)$ は Sturm–Liouville 方程式

$$U'' + \frac{d-1}{r}U' - V(r)U = 0 \tag{6.9}$$

の解で次の境界条件を満たすものである:

$$\limsup_{r\to 0+} |U(r)| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} r^{-\alpha(\omega)}U(r) = 1. \tag{6.10}$$

(3) 多次元レヴィ過程 (ブラウン運動を含む) で生成ポテンシャルの場合 (すなわち $V \le 0$ の場合) について．Takeda [10] による結果を非常にラフに述べると以下のようである (なお，分数べきラプラシアンの係数は 1 でなく 1/2 である)．$\mu(\mathrm{d}x) = -V(x)\mathrm{d}x$ は加藤クラスに属すといった仮定を置く．$\mathcal{E}(u,u)$ を分数べきラプラシアンの Dirichlet 形式とし，$\theta \ge 0$ に対し $\mathcal{E}_\theta(u,u) = \mathcal{E}(u,u) + \theta(u,u)$ とし，

$$\lambda(\theta) = \inf\left\{ \mathcal{E}_\theta(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 \mathrm{d}\mu = 1 \right\} \tag{6.11}$$

とおく．以下，$T_t^{-V} = T_t^\mu$ と書く．

(i) 再帰的 ($d \le \alpha$) な場合は，ある $\theta_0 > 0$ と $h \in D(\mathcal{E})$ であって $\lambda(\theta_0) = 1$ かつ $\mathcal{E}_{\theta_0}(h,h) = 1$ を満たすものが存在する．さらに，次が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\theta_0 t} T_t^\mu 1(x) = (h,1)h(x). \tag{6.12}$$

(ii) 非再帰的 ($d > \alpha$) な場合．(ii-1) $\lambda(0) < 1$ のときは，上と同様のことが成り立つ．(ii-2) $\lambda(0) > 1$ のときは，そのままで極限 $\lim_{t\to\infty} T_t^\mu 1(x)$ が存在する．(ii-3) $\lambda(0) = 1$ のときは，$d > 2\alpha$ のときだけ述べると，ある $h \in D_e(\mathcal{E})$ であって $\mathcal{E}(h,h) = 1$ を満たすものが存在する．さらに，次が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} T_t^\mu 1(x) = (h,\mu)h(x). \tag{6.13}$$

謝辞

神戸大学の前川泰則氏には，論文 [4] を教えていただき，他にも多くの有益なコメントをいただきました．ここに感謝します．また，この白浜研究集会の世話人の方々には，講演の機会をいただいたことに感謝します．

参考文献

[1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 116. Cambridge University Press, second edition, 2009.

[2] E. B. Dynkin. Markov processes and semigroups of operators. *Theory Probab. Appl.*, 1(1):22–33, 1956.

[3] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, *de Gruyter Studies in Mathematics* 19. Walter de Gruyter & Co., extended edition, 2011.

[4] K. Ishige and Y. Kabeya. Large time behaviors of hot spots for the heat equation with a potential. *J. Differential Equations*, 244(11):2934–2962, 2008. Corrigendum: 245(8):2352–2354, 2008.

[5] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, *MSJ Memoirs* 19. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[6] S. C. Port. Hitting times and potentials for recurrent stable processes. *J. Analyse Math.*, 20:371–395, 1967.

[7] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. I. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(2):171–246, 2006.

[8] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jpn. J. Math.*, 1(1):263–290, 2006.

[9] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, *Lecture Notes in Mathematics* 1969. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[10] M. Takeda. Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes. *Electron. Commun. Probab.*, 15:32–43, 2010.

[11] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal.*, 32(4):305–341, 2010.

[12] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.

[13] 伊藤清. 確率過程・オルフス大学講義録. シュプリンガージャパン, 2009. O.E. Barndorff - Nielsen(編集), 佐藤健一 (編集), 佐藤由身子 (翻訳).

[14] 佐藤健一. 加法過程. 紀伊國屋数学叢書. 紀伊國屋書店, 1990.

[15] 福島正俊・竹田雅好. マルコフ過程. 確率論教程シリーズ. 培風館, 2008.